

## Εξέταση Ιουνίου 2020 - Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Σε κάθε ερώτηση ενδεχομένως να υπάρχουν και περισσότερες από μία σωστή επιλογή.

**Ερώτηση 1.** (1 μον.) Δίνεται η επιφάνεια  $S$  με εξίσωση  $z = x^2 - y^2$ . Ποιά από τα ακόλουθα διανύσματα δεν εφάπτεται της  $S$  στο σημείο  $p(1, 1, 0)$ ;

- (i)  $w_1 = (1, 1, 0)$ ,
- (ii)  $w_2 = (0, 1, -2)$ ,
- (iii)  $w_3 = (1, 2, 2)$ ,
- (iv)  $w_4 = (3, 1, 4)$ ,
- (v) άλλο.

**Ερώτηση 2.** (3 μον.) Η παραμετρική καμπύλη  $c(u) = X(u, v_0)$  της κανονικής επιφάνειας  $X(u, v) = (v, 2 \cos u - v, \sin u)$ , είναι:

- (i) ευθεία,
- (ii) κύκλος,
- (iii) έλλειψη,
- (iv) γραμμή καμπυλότητας,
- (v) άλλο.

**Ερώτηση 3.** (1 μον.) Μια μη επίπεδη καμπύλη με καμπυλότητα  $k$  και στρέψη  $\tau$  είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης αν και μόνο αν:

- (i)  $k = \text{σταθερά}$ ,
- (ii)  $\tau = \text{σταθερά}$ ,
- (iii)  $k\tau = \text{σταθερά}$ ,
- (iv)  $\tau/k + k/\tau = \text{σταθερά}$ ,
- (v) άλλο.

**Ερώτηση 4.** (1 μον.) Στο σημείο  $p$  κανονικής επιφάνειας  $S$  ποιά από τα ακόλουθα δεν μπορεί να ισχύει για την καμπυλότητα Gauss και τη μέση καμπυλότητα;

- (i)  $K(p) = 1, H(p) = 1$ ,
- (ii)  $K(p) = 0, H(p) = 0$ ,
- (iii)  $K(p) = 1, H(p) = 2$ ,
- (iv)  $K(p) = 7, H(p) = 2$ ,

(v) άλλο.

**Ερώτηση 5.** (1 μον.) Σε σημείο  $p$  κανονικής επιφάνειας  $S$  θεωρούμε τυχούσα βάση  $w_1, w_2$  του εφαπτομένου επιπέδου. Αν για το διαφορικό της απεικόνισης Gauss ισχύει

$$dN_p(w_1) = 3w_1 + 5w_2, \quad dN_p(w_2) = w_1 + 2w_2$$

και η  $S$  είναι τοπικά ισομετρική με μία επιφάνεια σταθερής καμπυλότητας, τότε και η καμπυλότητα Gauss της  $S$  είναι:

- (i)  $K = 5$ ,
- (ii)  $K = 1$ ,
- (iii)  $K > 0$ ,
- (iv)  $K = -1$ ,
- (v) άλλο.

**Ερώτηση 6.** (1 μον.) Κανονική επιφάνεια  $S$  έχει σύστημα συντεταγμένων

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

Η παραμετρική καμπύλη  $u = \frac{\pi}{2}$  είναι:

- (i) κυλινδρική έλικα,
- (ii) ευθεία,
- (iii) γραμμή καμπυλότητας
- (iv) ασυμπτωτική καμπύλη
- (v) άλλο.

**Ερώτηση 7.** (1 μον.) Θεωρούμε καμπύλη  $c(s)$  με φυσική παράμετρο  $s$  και καμπυλότητα παντού θετική. Αν για κάθε  $s$  οι ευθείες οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $c(s)$  και είναι παράλληλες προς το κύριο μοναδιαίο διάνυσμα  $\tilde{n}(s)$  διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη  $c$  είναι τμήμα:

- (i) ευθείας,
- (ii) κύκλου,
- (iii) έλλειψης,
- (iv) κυλινδρικής έλικας,
- (v) άλλο.

**Ερώτηση 8.** (3 μον.) Τα θεμελιώση ποσά πρώτης τάξης κανονικής επιφάνειας  $S$  ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $X(u, v)$  είναι

$$E(u, v) = 1 + 4u^2, \quad F(u, v) = \frac{4}{3}uv, \quad G(u, v) = 1 + \frac{4}{3}v^2.$$

Οι καμπύλες  $c_1(t) = X(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in (0, 2\pi)$  και  $c_2(\sigma) = X(\sigma, \sqrt{3}\sigma)$ ,  $\sigma > 0$  τέμνονται υπό ορθή γωνία  $\theta$  με:

- (i)  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,
- (ii)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ,
- (iii)  $\cos \theta > 0$ ,
- (iv)  $\cos \theta = -\frac{1}{3\sqrt{5}}$ ,
- (v) Άλλο.

**Ερώτηση 9.** (3 μον.) Η παραμετρική επιφάνεια  $X(u, v) = (v, 2 \cos u - v, \sin u)$  είναι:

- (i) ελαχιστική,
- (ii) σφαιρική,
- (iii) ευθειςογενής,
- (iv) αναπτυκτική,
- (v) άλλο.

**Ερώτηση 10.** (3 μον.) Δίνεται επιφάνεια  $S$  με εξίσωση  $z = z^4 - y^3$ . Η εικόνα του εφαπτόμενου διανύσματος  $\vec{w} = (0, 2, 3)$  στο σημείο  $p(0, 0, 0)$  μέσω της απεικόνισης Weingarten είναι:

- (i)  $(0, 0, 0)$ ,
- (ii)  $\vec{w}$ ,
- (iii)  $2\vec{w}$ ,
- (iv)  $(1, -1, 3)$ ,
- (v) άλλο.

**Ερώτηση 11.** (1 μον.) Δίνονται οι επιφάνειες  $S_1$  : επίπεδο ,  $S_2$  : κύλινδρος ,  $S_3$  : αναπτυκτική και  $S_4$  :  $z = x^2 + y^2$  . Ποιά από τα ζεύγη επιφανειών που ακολουθούν δεν είναι ισομετρικές;

- (i) Μόνο οι  $S_1$  και  $S_2$ ,
- (ii) Μόνο οι  $S_1$  και  $S_3$ ,
- (iii) Μόνο οι  $S_2$  και  $S_3$ ,
- (iv) Μόνο οι  $S_2$  και  $S_4$ ,
- (v) άλλο.

**Ερώτηση 12.** (3 μον.) Έστω μία καμπύλη  $c(s)$  του  $\mathbb{R}^3$ , με φυσική παράμετρο  $s > 0$  καμπυλότητα  $k(s) > 0$ , για κάθε  $s > 0$  και μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\vec{t}(s)$ . Αν η καμπύλη

$$\hat{c}(s) = c(s) - s\vec{t}(s), \quad s \in I$$

έχει σταθερή καμπυλότητα, τότε η καμπύλη  $c$  είναι:

- (i) επίπεδη,
- (ii) ευθεία,
- (iii) κυλινδρική έλικα,
- (iv) κύκλος,
- (v) άλλο.